КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathfrak{U}$-АБНОРМАЛЬНЫМИ И $\mathfrak{U}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
Советская, 104, 246019 Гомель, Беларусь Victor.Monakhov@gmail.com

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемая терминология соответствует [1].

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G. Запись $A \rtimes B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. Используются также следующие обозначения:

$H \leq G$ — H является подгруппой группы G;

$H < G$ — H является собственной подгруппой группы G;

$H <\cdot\, G$ — H является максимальной подгруппой группы G

Подгруппой Картера называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу.

Подгруппой Гашюца группы G называется подгруппа K, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) K сверхразрешима;

2) если $K \leq K_1 \leq K_2 \leq G$, то $|\, K_2 : K_1\, |$ — не простое число.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ — формации всех нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Ясно, что $G^{\mathfrak{H}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ для формаций $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, в частности, $G^{\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{N}}$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\, H_1 <\cdot\, \ldots <\cdot\, H_n = G,$$

такая, что $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}H_{i-1} \in \mathfrak{F}$ для всех i. Это равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq \mathrm{Core}_{H_i}H_{i-1}$. Здесь $\mathrm{Core}_G H = \bigcap_{g\in G} H^g$ — ядро подгруппы H в группе G.

Класс групп, в которых все примарные циклические подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны, обозначается через $\mathfrak{X}$. Группы из этого класса полностью описаны в работе В. С. Монахова и В. Н. Княгиной [2]. В частности, группа $G \in \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда каждая подгруппа с нильпотентным коммутантом сверхразрешима. Группы, в которых все примарные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны, составляют класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, полностью изученный в работе А. Ф. Васильева, Т. И. Васильевой и В. Н. Тютянова [3]. В частности, группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда каждая метанильпотентная подгруппа сверхразрешима. Понятно, что $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если $L/\mathrm{Core}_L K \notin \mathfrak{F}$ для всех подгрупп K и L таких, что $H \leq K <\cdot\, L \leq G$. Это равносильно тому, что $L^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\mathrm{Core}_L K$. Поэтому каждая $\mathfrak{H}$-абнормальная подгруппа $\mathfrak{F}$-абнормальна для формаций $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, в частности, каждая $\mathfrak{U}$-абнормальная подгруппа $\mathfrak{N}$-абнормальна.

Общие свойства групп, у которых каждая подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ исследовались в [4–6]. Полное описание строения группы, в которой каждая подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна или $\mathfrak{U}$-абнормальна, получили В. Н. Семенчук и А. Н. Скиба [7]. В этой работе они предложили следующую задачу.

Задача. *Какое строение имеет группа, у которой каждая нильпотентная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна или $\mathfrak{U}$-абнормальна?*

Решение этой задачи получено в следующей теореме.

Теорема. *В группе G каждая нильпотентная подгруппа $\mathfrak{U}$-абнормальна или $\mathfrak{U}$-субнормальна тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, либо выполняются следующие утверждения:*

1) *силовская p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$ является подгруппой Картера и P является подгруппой Гашюца; если $G \notin \mathfrak{X}$, то P* циклическая; *если $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то P нециклическая и p — наименьшее в $\pi(G)$;*

2) *$G^{\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{N}}$ — p'-холлова подгруппа группы G;*

3) *$R \ltimes G^{\mathfrak{N}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ для всех $R < P$; в частности, все метанильпотентные подгруппы в $RG^{\mathfrak{N}}$ сверхразрешимы.*

Замечание. Согласно [3] для любого натурального n существует группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, нильпотентная длина которой равна n. Поэтому в теореме подгруппа $G^{\mathfrak{U}}$ может иметь любую нильпотентную длину. В частности, $G^{\mathfrak{U}}$ может быть несверхразрешимой в отличие от ситуации теоремы из [7].

Литература

1. Шеметков Л. А. *Формации конечных групп.* М.: Наука. 1978.

2. Monakhov V.S., Kniahina V.N. *Finite group with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups* // Ricerche di Matematica. 2013. Vol. 62, № 2. P. 307–323.

3. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О конечных группах сверхразрешимого типа* // Сибирский математический журнал. 2010. Том 51, № 6. С. 1270–1281.

4. Förster P. *Finite groups all of whose subgroups are $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-subabnormal* // J. Algebra. 1986. Vol. 103, № 1. P 285–293.

5. Семенчук В. Н. *Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами* // Вопросы алгебры. Минск: Университетское. 1986, № 2. С. 50–55.

6. Семенчук В. Н., Шевчук С. Н. *Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны* // Известия вузов. Математика. 2011, № 8. С. 46–55

7. Semenchuk V. N., Skiba A. N. *On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups* // ArXiv. org e-Print archive, arXiv:1412.5469v1, 17 Dec 2014.